24/10

Πρόταση 1

Ένα υποσύνολο A του μ.χ. E είναι πυκνό εν E αν και μόνο αν για κάθε μη κενό κ ανοιχτό υποσύνολο B του E, ισχύει: $A \cap B \neq \emptyset$

Πρόταση 2

Ένα υποσύνολο A του E είναι πυκνό εν E αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το A είναι ε-πυκνό στον μ.χ. E

Απόδειξη προτ. 1

($\Rightarrow$) Έστω A πυκνό εν E. Τότε $\bar{A} = E$.
Έστω $B \subseteq E$, $B \neq \emptyset$ κ B ανοιχτό
Θεωρώ x τυχόν: $x \in B \xrightarrow{B \text{ ανοιχτό}} (\exists r>0): B(x,r) \subseteq B$
$\xrightarrow{x \in B \Rightarrow x \in E = \bar{A}} B(x,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow{A \cap B(x,r) \subseteq A \cap B} A \cap B \neq 0$
($\Leftarrow$) Έστω ισχύει η (———) Θ.δ.ο. $\bar{A} = E$ (ή ισοδύναμα $E \subseteq \bar{A}$)
Θεωρώ x τυχόν: $x \in E$ κ $B(x,r)$, $r>0$ σφαιρ. περιοχή του x
$\emptyset \neq B(x,r)$ ανοιχτό. Άρα (———) $\Rightarrow A \cap B(x,r) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

Απόδειξη προτ. 2

($\Rightarrow$) Έστω A πυκνό εν E, δηλ. $\bar{A} = E$. Επίσης, θεωρώ ε τυχόν: $\varepsilon > 0$.
Θ.δ.ο. το A είναι ε-πυκνό
Έστω x τυχόν, $x \in E = \bar{A}$ Τότε $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (γιατί $x \in \bar{A}$)
Έστω $y \in B(x,\varepsilon) \cap A$. Τότε $y \in A$ κ $\rho(x,y) < \varepsilon$
($\Leftarrow$) Έστω A είναι ε-πυκνό $\forall \varepsilon > 0$ Θ.δ.ο. $\bar{A} = E$ (δηλ. Θ.δ.ο. $E \subseteq \bar{A}$)
Θεωρώ $x: x \in E \xrightarrow{A \text{ είναι } \varepsilon\text{-πυκνό } \forall \varepsilon} (\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A): \rho(x,y) < \varepsilon \Rightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0): y \in A \cap B(x,\varepsilon) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0): A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

(32)

$x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon < x \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}) : x - \varepsilon < q < x$

$\Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}) : q \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = B(x,\varepsilon)$

$B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \xRightarrow{\text{ετυχόν}} x \in \overline{\mathbb{Q}}$

$\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ άρα $\mathbb{Q}$ πυκνό

ΑΣΚΗΣΗ: Ν.δ.ο. το $\mathbb{Z}$ είναι L-πυκνό σύνολο

Εφαρμογή

D πυκνό υποσύνολο του μ.χ. E κ A ανοιχτό υποσύνολο του E

Ν.δ.ο. $\overline{D \cap A} = \overline{A}$

Λύση

$D \cap A \subseteq A \Rightarrow \overline{D \cap A} \subseteq \overline{A}$. Αρκεί ν.δ.ο. $\overline{D \cap A} \supseteq \overline{A}$

Έστω $x \in \overline{A}$ κ $B(x,r)$ τυχούσα περιοχή του x

Άρα $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ όμως $B(x,r) \cap A$ είναι ανοιχτό

(γιατί είναι τομή πεπερασμένων ανοιχτών συνόλων) $\xRightarrow[\text{πρότ. 1}]{D \text{ πυκνό}}$

$D \cap B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow (D \cap A) \cap B(x,r) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{D \cap A}$

Ορισμός

Στον E μ.χ. έστω η ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ οικογένεια όπου N είναι ένα κάτω φραγμένο κ απέραντο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$

Ορισμός

Το l είναι όριο της ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$

η πραγματ. ακολουθία $(\rho(\alpha_\nu, l))_{\nu \in \mathbb{N}} \to 0$ Δηλ.

Δηλ. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall \nu > n) : \rho(\alpha_\nu, l) < \varepsilon$

Πρόταση
Κάθε ακολουθία σ' ένα μ.χ. τείνει το πολύ σε ένα όριο.
(Αν τείνει σε όριο είναι μοναδικό)

Απόδειξη
Ας είναι l_1, l_2 όρια της ακολ. $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ σ' ένα μ.χ. E.
Έστω ε τυχών θετικός αριθμός τότε.
$(\exists n_1)(\forall \nu > n_1): \rho(a_\nu, l_1) < \frac{\varepsilon}{2}$
$(\exists n_2)(\forall \nu > n_2): \rho(a_\nu, l_2) < \frac{\varepsilon}{2}$
Έστω $\nu > n$. Τότε: $0 \leq \rho(l_1, l_2) \leq \rho(a_\nu, l_1) + \rho(a_\nu, l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\xrightarrow{\varepsilon \text{ τυχόν}} \rho(l_1, l_2) = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$

• Το όριο το συμβολίζουμε ως εξής: $\rho\text{-}\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$

Πρόταση
$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολ. στον μ.χ. E κ $l \in E$. Τότε
$\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l \Leftrightarrow (\forall U(l)): a_\nu \in U(l)$ τελικά για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$ (*)
$[(\exists n)(\forall \nu > n)]$

Απόδειξη
$(\Rightarrow)$ Έστω $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l$ κ $U(l)$ τυχούσα περιοχή του $l \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0): B(l,\varepsilon) \subseteq U(l)$
$\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l \Rightarrow (\exists n)(\forall \nu > n): \rho(a_\nu, l) < \varepsilon \Rightarrow (\exists n)(\forall \nu > n): a_\nu \in B(l,\varepsilon)$
$\xrightarrow{B(l,\varepsilon) \subseteq U(l)} (\exists n)(\forall \nu > n): a_\nu \in U(l)$
$(\Leftarrow)$ Έστω ισχύει το (*). Θ.δ.ο. $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l$
Έστω $\varepsilon > 0$ τυχών. $B(l,\varepsilon)$ περιοχή του $l \xRightarrow{(*)}$
$a_\nu \in B(l,\varepsilon)$ τελικά $\Rightarrow (\exists n)(\forall \nu > n): a_\nu \in B(l,\varepsilon) \Rightarrow$
$(\exists n)(\forall \nu > n): \rho(a_\nu, l) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l$